YLEINEN KOE 2003

MATEMATIIKKA/TILASTOTIEDE — ratkaisut ja arvostelu

1. a) Ratkaise yhtälö $x^2 - 1 = 5(x-1)$. *(2 p.)*

Ratkaisu:
$x^2 - 1 = 5(x-1) \Leftrightarrow (x+1)(x-1) - 5(x-1) = 0 \Leftrightarrow (x-4)(x-1) = 0 \Leftrightarrow x = 4$ tai $x = 1$.
Siis yhtälön ratkaisut ovat $x = 1$ ja $x = 4$.

Arvostelu:
Kummastakin ratkaisusta (korrektilla tavalla löydettynä) +1 p. Yksittäinen pieni laskuvirhe −1 p.

b) Laske $\int_1^8 x(2\sqrt{x} - 1)\,dx$. *(2 p.)*

Ratkaisu:

$$\int_1^8 x(2\sqrt{x}-1)\,dx = \int_1^8 (2x^{3/2} - x)\,dx = \Big/_{1}^{8} \left(\frac{4}{5}x^{5/2} - \frac{1}{2}x^2\right)$$
$$= \left(\frac{4}{5}\cdot 8^{5/2} - \frac{1}{2}\cdot 8^2\right) - \left(\frac{4}{5} - \frac{1}{2}\right) = \frac{4}{5}\cdot 128\sqrt{2} - 32 - \frac{3}{10}$$
$$= \frac{1024\sqrt{2} - 323}{10}.$$

Arvostelu:
Integraalifunktio muodostettu oikein +1 p. Mikäli ei, koko tehtävästä tulee 0 p. paitsi jos virhe on hyvin vähäinen (tyypillisesti $x^{5/2}$:n tai x^2:n kertoimessa lapsus). Sijoitus tehty oikein $+\frac{1}{2}$ p. Sievennetty mahdollisimman siistiin muotoon $+\frac{1}{2}$ p.

c) Vektorit $\bar{a}$, $\bar{b}$ ja $\bar{c}$ lähtevät samasta pisteestä ja toteuttavat yhtälön $2\bar{a} - 3\bar{b} + \bar{c} = 0$. Osoita, että niiden päätepisteet ovat samalla suoralla. *(2 p.)*

Ratkaisu:
Olkoot A, B ja C vektoreiden $\bar{a}$, $\bar{b}$ ja $\bar{c}$ päätepisteet. Oletuksesta seuraa $\bar{c} = 3\bar{b} - 2\bar{a}$, jolloin $\bar{c} - \bar{a} = 3\bar{b} - 2\bar{a} - \bar{a} = 3(\bar{b} - \bar{a})$. Siten vektorit $\overrightarrow{AC} = \bar{c} - \bar{a}$ ja $\overrightarrow{AB} = \bar{b} - \bar{a}$ ovat yhdensuuntaiset, mikä merkitsee, että pisteet A, B ja C ovat samalla suoralla.

Arvostelu:
Oivallettu, että tarvitaan muotoa $\bar{c} - \bar{a} = k(\bar{b} - \bar{a})$ (k reaaliluku) oleva yhtälö (tai vastaava) +1 p. Johdettu sellainen oletuksesta +1 p.

VALTIOTIETEELLINEN TIEDEKUNTA
TILASTOTIETEEN VALINTAKOE 6. 6. 2003

MATEMATIIKAN TEHTÄVÄT — ratkaisut ja arvostelu (LK & PN)

1. a) Ratkaise yhtälöpari

$$\begin{cases} 4x - 3y = 1 \\ 5x + 6y = -1. \end{cases} \qquad \textit{(3 p.)}$$

Ratkaisu:
Kertomalla ensimmäinen yhtälö kahdella saadaan yhtäpitävä yhtälöpari

$$\begin{cases} 8x - 6y = 2 \\ 5x + 6y = -1. \end{cases}$$

Laskemalla nämä yhtälöt puolittain yhteen saadaan $13x = 1$, josta $x = \frac{1}{13}$. Sijoittamalla tämä alkuperäisen yhtälöparin ensimmäiseen yhtälöön saadaan $4 \cdot \frac{1}{13} - 3y = 1$ eli $3y = \frac{4}{13} - 1 = -\frac{9}{13}$, josta $y = -\frac{3}{13}$. Siis yhtälöparin ratkaisu on $(x, y) = (\frac{1}{13}, -\frac{3}{13})$.

Arvostelu:
Yksittäinen laskuvirhe -0.5p. Joko x tai y jäänyt ratkaisematta -1p.

b) Kuinka monta reaalijuurta on yhtälöllä $x^3 + 2 = x^2 + x$? *(3 p.)*

Ratkaisu:
Kyseiset juuret ovat täsmälleen polynomin $f(x) = x^3 - x^2 - x + 2$ (reaaliset) nollakohdat. Tutkitaan f:n kulkua derivaatan avulla. Polynomifunktiona f on jatkuva ja derivoituva ja $f'(x) = 3x^2 - 2x - 1$. Siis f':n kuvaaja on ylösaukeava paraabeli, ja sen nollakohdat ovat $x = -\frac{1}{3}$ ja $x = 1$. Näin ollen f on aidosti kasvava väleillä $]-\infty, -\frac{1}{3}]$ ja $[1, \infty[$ sekä aidosti vähenevä välillä $[-\frac{1}{3}, 1]$. Koska $f(-2) = -8 < 0$ ja $f(-\frac{1}{13}) = \frac{59}{27} > 0$, seuraa f:n jatkuvuuden (ja ns. Bolzanon lauseen) perusteella, että f:llä on nollakohta välillä $[-2, -\frac{1}{13}]$. Siten f:llä on täsmälleen yksi nollakohta välillä $]-\infty, -\frac{1}{3}]$. Toisaalta $f(1) = 1 > 0$, joten f:llä ei ole nollakohtia väleillä $[-\frac{1}{3}, 1]$ ja $[1, \infty[$.

$f'(x)$	$+$	$-$	$+$
$f(x)$	$\nearrow$	$\searrow$	$\nearrow$
		$-\frac{1}{3}$	1

Vastaus: yhtälöllä $x^3 + 2 = x^2 + x$ on täsmälleen yksi reaalijuuri.

Arvostelu:
Funktion f jatkuvuus jäänyt mainitsematta -0.5p. Nollakohdan olemassaolon perustelut puuttuvat -1p.

2. Halutaan valmistaa litran vetoinen suorakulmaisen särmiön muotoinen kanneton astia, jonka pohja on neliö. Vaippaan käytettävä pelti on kaksi kertaa niin kallista kuin pohjaan käytettävä. Miten astian korkeus ja pohjasärmän pituus on valittava, jotta astian valmistaminen tulisi mahdollisimman edulliseksi? (Tarkat arvot, ei likiarvoja.) *(6 p.)*

Ratkaisu:
Olkoon astian korkeus h cm ja pohjasärmän pituus x cm, missä $h > 0$ ja $x > 0$. Astian tilavuudelle asetetusta ehdosta saadaan yhtälö $x^2h = 1000$ eli $h = 1000/x^2$. Valmistuskus-

tannukset ovat suoraan verrannolliset lausekkeeseen

$$K = \text{pohjan ala} + 2 \cdot \text{vaipan ala} = x^2 + 2 \cdot 4xh = x^2 + \frac{8000}{x}.$$

Tarkastellaan tätä muuttujan x funktiona $K(x)$. Selvästi K on derivoituva määrittelyjoukossaan $]0, \infty[$ ja

$$K'(x) = 2x - \frac{8000}{x^2} = \frac{2x^3 - 8000}{x^2}.$$

Koska $x^2 > 0$, niin osoittaja määrää derivaatan merkin. Osoittaja $2x^3 - 8000$ on aidosti kasvava funktio ja $2x^3 - 8000 = 0 \Leftrightarrow x^3 = 4000 \Leftrightarrow x = 10\sqrt[3]{4}$. Siten $K'(x) < 0$, kun $x \in]0, 10\sqrt[3]{4}[$, ja $K'(x) > 0$, kun $x \in]10\sqrt[3]{4}, \infty[$. Siis K on aidosti vähenevä välillä $]0, 10\sqrt[3]{4}]$ ja aidosti kasvava välillä $[10\sqrt[3]{4}, \infty[$, joten se saa pienimmän arvonsa kohdassa $x = 10\sqrt[3]{4}$. Tällöin

$$h = \frac{1000}{x^2} = \frac{1000}{100\sqrt[3]{16}} = \frac{5}{\sqrt[3]{2}}.$$

Vastaus: astian korkeudeksi tulee valita $5/\sqrt[3]{2}$ cm ja pohjasärmän pituudeksi $10\sqrt[3]{4}$ cm.

Arvostelu:
Laskuvirhe -1p. Ääriarvoa ei ole perusteltu minimiksi funktion kulun tai toisen derivaatan avulla -1p. Ei mitään mainintaa ääriarvosta -2p. Kustannusfunktion määrittelyssä virhe -2p.

3. Tarkastellaan kolmiota, jonka kärkipisteet ovat $O = (0,0)$, $A = (3,4)$ ja $B = (0,6)$.

a) Määritä kulman AOB puolittajan ja sivun AB leikkauspiste. *(3 p.)*

Ratkaisu:
Muodostetaan paikkavektorit $\overrightarrow{OA} = 3\mathbf{i} + 4\mathbf{j}$ ja $\overrightarrow{OB} = 6\mathbf{j}$ sekä erotusvektori $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OA} = -3\mathbf{i} + 2\mathbf{j}$. Olkoon etsitty leikkauspiste P. Kulmanpuolittajalauseen mukaan kolmion kulman puolittaja jakaa vastaisen sivun viereisten sivujen suhteessa. Koska $|\overrightarrow{OA}| = 5$ ja $|\overrightarrow{OB}| = 6$, saadaan P:n paikkavektoriksi

$$\overrightarrow{OP} = \overrightarrow{OA} + \frac{5}{5+6}\overrightarrow{AB} = 3\mathbf{i} + 4\mathbf{j} + \frac{5}{11}(-3\mathbf{i} + 2\mathbf{j}) = \frac{18}{11}\mathbf{i} + \frac{54}{11}\mathbf{j}.$$

Siis $P = \left(\frac{18}{11}, \frac{54}{11}\right) = \left(1\frac{7}{11}, 4\frac{10}{11}\right)$.

Arvostelu:
Toteamalla, että piste P jakaa janan AB suhteessa $6:5$, saa $+1.5$p. ja määrittämällä P:n koordinaatit $+1.5$p. Vähäinen laskuvirhe -0.5p. Isompi laskuvirhe -1p.

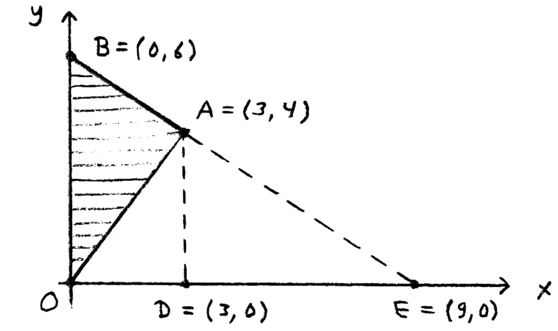
b) Kolmion rajoittama alue pyörähtää x-akselin ympäri. Laske syntyvän pyörähdyskappaleen tilavuus. *(3 p.)*

Ratkaisu:
Tapa 1. Pisteiden O ja A kautta kulkevan suoran yhtälö on $y = \frac{4}{3}x$, ja pisteiden B ja A kautta kulkevan suoran yhtälö on $y = -\frac{2}{3}x + 6$. Yleistä pyörähdyskappaleen tilavuuden kaavaa soveltamalla saadaan kysytyksi tilavuudeksi

$$\begin{aligned} V &= \pi \int_0^3 \left(-\tfrac{2}{3}x + 6\right)^2 dx - \pi \int_0^3 \left(\tfrac{4}{3}x\right)^2 dx = \pi \int_0^3 \left(-\tfrac{12}{9}x^2 - 8x + 36\right) dx \\ &= \pi \Big/_0^3 \left(-\tfrac{4}{9}x^3 - 4x^2 + 36x\right) = \pi(-12 - 36 + 108) = 60\pi. \end{aligned}$$

Tapa 2. Merkitään $D = (3,0)$ ja $E = (9,0)$. Tällöin pisteet B, A ja E ovat samalla suoralla. Kolmion OEB pyörähtäessä x-akselin ympäri syntyy kartio, jonka tilavuus on

$V_1 = \frac{1}{3}\pi 6^2 9 = 108\pi$. Samoin kolmioiden ODA ja DEA pyörähtäessä syntyvät kartiot, joiden tilavuudet ovat $V_2 = \frac{1}{3}\pi 4^2 3 = 16\pi$ ja $V_3 = \frac{1}{3}\pi 4^2 6 = 32\pi$. Kysytty tilavuus on $V = V_1 - V_2 - V_3 = 60\pi$.



Tapa 3. Ns. Pappuksen kaavan mukaan on $V = 2\pi y A$, jossa y on pyörähtävän tasoalueen painopisteen etäisyys pyörähdysakselista ja A on sen pinta-ala. (Huomattava, että alue ei leikkaa pyörähdysakselia!) Kolmion OAB painopisteen koordinaatit ovat

$$x = \frac{0+3+0}{3} = 1, \qquad y = \frac{0+4+6}{3} = \frac{10}{3},$$

ja sen pinta-ala on $A = \frac{1}{2}6 \cdot 3 = 9$. Siten $V = 2\pi \cdot \frac{10}{3} \cdot 9 = 60\pi$.

Arvostelu *(tapa 1)*:
Lauseke $V = \pi \int_0^3 (\cdots)^2\, dx - \pi \int_0^3 (\cdots)^2\, dx$ oikein muodostettu $+2$p. Integraalit laskettu $+1$p. Pieni laskuvirhe -0.5p. Irtopisteitä saa esim. pyörähdyskappaleen tilavuuden kaavan muistamisesta $+0.5$p.